$=\left[2t-t^2+t\ln t-t\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\times 4^2\,cm^2=\left(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\times 16cm^2$.

II- 1) la fonction : $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur]0 ;1[

donc elle admet au moins une primitive G sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. La fonction $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et

$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\Rightarrow 2x\in]0;1[\subset]0;1]$. Donc la fonction : $x\mapsto G(2x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ comme composée de deux fonctions.

Alors F est dérivable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et on a : $F'(x)=(2x)'G'(2x)-(x)'G'(x)=2.\frac{1}{\ln 2x}-\frac{1}{\ln x}=\frac{2\ln x-\ln 2x}{\ln(2x)\ln(x)}$

$=\frac{\ln\frac{x^2}{2x}}{\ln(2x)\ln(x)}=\frac{\ln\frac{x}{2}}{\ln(2x)\ln(x)}$.

2) $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$. $x\le t\le 2x\Leftrightarrow\ln x\le\ln t\le\ln 2x$ comme 2x < 1 c-à-d ln2x < 0 alors $\frac{1}{\ln 2x}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{1}{\ln x}$. Or les fonctions :

$\left.\begin{array}{l} t\mapsto\frac{1}{\ln t}\\ t\mapsto\frac{1}{\ln x}\\ t\mapsto\frac{1}{\ln 2x}\end{array}\right\}$ *sont continues sur* $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ on aura : $\int_x^{2x}\frac{1}{\ln 2x}dt\le\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\le\int_x^{2x}\frac{1}{\ln x}dt\Leftrightarrow\frac{2x-x}{\ln 2x}\le\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\le\frac{2x-x}{\ln x}$

$\Leftrightarrow\frac{x}{\ln 2x}\le F(x)\le\frac{x}{\ln x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln 2x}\le\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)\le\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}$ or $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln 2x}=\frac{0}{\infty}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{0}{\infty}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$.

3) $F(x)\le\int_x^{2x}\frac{dt}{t-1}$. D'après I-1) : 2t -2 ≤ lnt. Les fonctions : $t\mapsto 2t-2$ *et* $t\mapsto\ln t$ sont continues sur $\left[\alpha,\frac{1}{2}\right[$ donc :

$\frac{1}{2t-2}\ge\frac{1}{\ln t}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\ge\frac{1}{\ln t}\Rightarrow\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{1}{t-1}dt\ge\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt\Leftrightarrow F(x)\le\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{1}{t-1}dt\Rightarrow\ F(x)\le\left[\ln(|t-1|)\right]_x^{2x}$

$\Leftrightarrow F(x)\le\frac{1}{2}\left[\ln(|2x-1|)-\ln(|x-1|)\right]$ comme $x\le\frac{1}{2}\Rightarrow x-1<0$ *et* $2x-1<0$ donc : $|x-1|=-x+1$ *et* $|2x-1|=-2x+1$

donc : $F(x)\le\frac{1}{2}\left[\ln(1-2x)-\ln(1-x)\right]$ or : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}1-2x=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\ln(1-2x)=-\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}F(x)=-\infty$.

4) Le tableau de variation de F : $F'(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{\ln(2x)\ln(x)}\ \forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\Rightarrow\frac{x}{2}\in\left]0,\frac{1}{4}\right[\Rightarrow\ln\frac{x}{2}<0$. $\ln(x)<0;x\in]0;1[$

et $\ln 2x<0$ donc : $F'(x)\le 0\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$

x	0		$\frac{1}{2}$
F'(x)	‖	—	
F(x)	0	↘	$-\infty$

5) $1+nF(x)=0\Leftrightarrow F(x)=-\frac{1}{n}$ comme F est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ sur $F\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)=]-\infty,0[$ comme $\left(-\frac{1}{n}\right)\in]-\infty,0[$ donc il existe un unique $\alpha_n\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ tel que : $F(\alpha_n)=-\frac{1}{n}$ On a $1+n>n\Leftrightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{1+n}\Leftrightarrow-\frac{1}{1+n}>-\frac{1}{n}\Rightarrow F(\alpha_{n+1})>F(\alpha_n)$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...